研究プロジェクト成果報告書（特別研究）

研究課題　数学授業におけるパフォーマンス評価を伴う関数教材及び単元の開発研究

研究期間　令和２年度～令和３年度

研究組織

髙橋等	自然生活教育学系・教授 (数学教育学)	研究代表者(研究の計画，単元設計，評価)
岩崎浩	自然生活教育学系・教授 (数学教育学)	研究分担者(研究の計画，単元設計，評価)
中川仁	自然生活教育学系・教授(代数学)	研究分担者(教材開発，評価)
斎藤敏夫	自然生活教育学系・教授(幾何学)	研究分担者(教材開発，評価)
林田秀一	自然生活教育学系・准教授(代数学)	研究分担者(教材開発，評価)
南幸江	附属中学校・教諭(数学)	研究分担者(授業実践)
山岸卓矢	附属中学校・教諭(数学)	研究分担者(授業実践)
髙橋勇介*	教科・領域教育専攻　自然系教育実践コース (数学) 305404P	研究協力者(評価)
高田智裕*	教科・領域教育専攻　自然系教育実践コース (数学) 305403K	研究協力者(評価)
余申航*	学校教育専攻　学校教育深化C（文理深化・数学）20195306M	研究協力者(評価)
柳谷太一	学校教育専攻　学校教育深化C（文理深化・数学）20195305p	研究協力者(評価)
長島ヒデキ*	教育実践高度化専攻教科教育・学級経営実践コース　20195525L	研究協力者(評価)
浅妻遼*	教育実践高度化専攻教科教育・学級経営実践コース　20205501F	研究協力者(評価)
山﨑誠*	教育実践高度化専攻教科教育・学級経営実践コース　20205549L（現職）	研究協力者(評価)
野上浩樹*	教育実践高度化専攻教科教育・学級経営実践コース　20205538E（現職）	研究協力者(評価)
上田未来*	学校教育専攻　学校教育深化C（文理深化・数学）20195301L	研究協力者(評価)
大原一将	学校教育専攻　学校教育深化C（文理深化・数学）20195302P	研究協力者(評価)
大橋 翔	学校教育専攻　学校教育深化C（文理深化・数学）20205301B	研究協力者(評価)

*令和 2 年度のみ

・研究成果の概要
この研究の目的は，パフォーマンス評価を伴う数学授業で扱う教材を開発し，それらの教材を含む単元を構築することである．構築する単元として，当面は中学校数学の関数単元，大学数学の微積分学単元を取り上げる．

パフォーマンス評価法は平成29年度告示学習指導要領の解説でも取り上げられる通り，学校教育における授業改善に向けて新規に導入された評価法である．この評価法では，パフォーマンス課題に対する活動を評価する．数学授業では，パフォーマンス課題は，数学的考え方を豊かに発揮しなければならない，所謂，全国学力学習状況調査における活用型の教材であり，その学習には討論を伴うし，実験や模型作りなども必要である．

パフォーマンス課題となる教材の開発は時代を先駆けたものとなるであろうし，パフォーマンス評価のある単元の構築は先進的な行いともなる．大学数学授業における実施も類を見ないものとなる．

新学習指導要領にも関連するパフォーマンス評価は，数学の活用型学力に対応し，教材開発とパフォーマンス評価の手続きとに焦点を当てれば，相当の成果があったと判断する．

・研究成果の発表状況
中川仁．(2021)．反比例のグラフについての考察．上越数学教育研究，36，17-26．
中川仁．(2022)．三角錐の体積についての考察．上越数学教育研究，37，13-18．
髙橋等．(2022)．中学校・高等学校の評価法．礒田正美他(編)，中等数学科教育，pp.76-84．協同出版．

・学校現場や授業への研究成果の還元について
今のところ，論文をもって行っているものの，上越地域で開催される数学教育の研究会において，時間を設けて研究成果を流布する予定となっている。論文については添付資料として提出する．

上越数学教育研究，第 36 号，上越教育大学数学教室，2021 年，pp. 17–26.

反比例のグラフについての考察

中川　仁
上越教育大学

1　はじめに

小学校で学ぶ反比例のグラフは，円とともになじみのある曲線であるが，その性質を数学的に詳しく学ぶ機会は高等学校の数学 III で分数関数の微分や自然対数を学ぶときまではほとんどない．以下，反比例のグラフのもつ性質を調べてみる．本稿は 2019 年 8 月 30 日に上越教育大学附属中学校 3 年生を対象に実施した「ワクワク大学デー」における授業で扱った内容を発展させたものである．

2　反比例 $y=1/x$ と $y=4/x$ のグラフ

図 1 において, 関数 $y=1/x$ と関数 $y=4/x$ のグラフが与えられている．$y=4/x$ 上の点 $\mathrm{P}(4,1)$ と原点 O を通る直線を l とする．直線 l と $y=1/x$ の第 1 象限における交点を Q とする．点 P から x 軸におろした垂線と x 軸の交点を A，点 P から y 軸におろした垂線と y 軸の交点を B，A と B を通る直線を m とする．直線 l の傾きは $1/4$ であり，l は

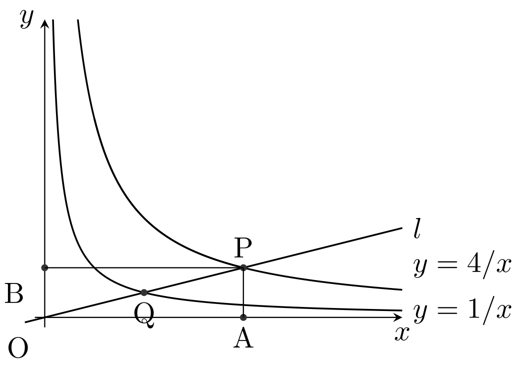

図 1　$y=4/x$ と $y=1/x$ のグラフ

原点を通るから l の方程式は $y=(1/4)x$ である．l と $y=1/x$ の交点は，$(1/4)x=1/x$ より $x^2=4$, $x=\pm2$，よって $\mathrm{Q}(2,1/2)$ である．$\mathrm{A}(4,0)$, $\mathrm{B}(0,1)$ より直線 m の傾きは $-1/4$ であり，m は B を通るから m の方程式は $y=(-1/4)x+1$ である．m と $y=1/x$ の交点を求める．

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{4}x+1,\quad 4=-x^2+4x,$$

$(x-2)^2=0$, $x=2$, $y=1/2$ となるから，交点は 1 点 Q のみとなる．これは直線 m が $y=1/x$ の点 $\mathrm{Q}(2,1/2)$ における接線であることを意味する (図 2).

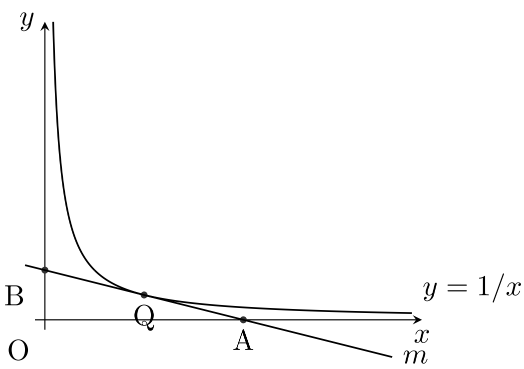

図 2　$y=1/x$ のグラフの接線

点 P を $y=4/x$ 上の第 1 象限の一般の点 $(2c,2/c)$ $(c>0)$ としても $\mathrm{Q}(c,1/c)$, $\mathrm{A}(2c,0)$, $\mathrm{B}(0,2/c)$ であり，A, B を通る直線 m の方程式は

$$y=-\frac{1}{c^2}x+\frac{2}{c} \tag{2.1}$$

であり，これは曲線 $y = 1/x$ の点 $\mathrm{Q}(c, 1/c)$ における接線である．

3　算術平均，幾何平均，調和平均の関係

反比例のグラフを用いることにより，2 つの正数 a, b の相加平均が相乗平均以上であるという不等式

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \tag{3.1}$$

を視覚化できることを説明する．

$0 < a < b$ とする．$y = 1/x$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{A}(a, 1/a)$, $\mathrm{B}(b, 1/b)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{(1/b)-(1/a)}{b-a} = \frac{a-b}{ab(b-a)} = -\frac{1}{ab}$$

である．平均値の定理により $a < c < b$ で点 $\mathrm{C}(c, 1/c)$ における $y = 1/x$ の接線の傾きが $-1/ab$ に等しいものが存在する．実際，(2.1) により $c = \sqrt{ab}$ とおけば，接線の傾きは $-1/c^2 = -1/ab$ となる．一方，A における接線と B における接線はそれぞれ

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}, \quad y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$$

であるから，それらの交点を D とすると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} &= -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}, \\ \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}x &= \frac{2(a-b)}{ab}, \\ x &= \frac{2ab}{a+b}, \\ y = -\frac{1}{a^2}\frac{2ab}{a+b} + \frac{2}{a} &= \frac{2}{a+b} \end{aligned}$$

となるから，$\mathrm{D}(2ab/(a+b), 2/(a+b))$ である．

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad h = \frac{2ab}{a+b}$$

とおき，m, g, h をそれぞれ a と b の**算術平均**，**幾何平均**，**調和平均**とよぶ．点 A と点 B の中点を $\mathrm{M}((a+b)/2, (1/a+1/b)/2)$ とする．m, g, h はそれぞれ点 M, C, D の x 座標である．これらを図示すると図 3 のようになり，$m \geq g \geq h$ がわかる．すなわち，算術平均，幾何平均，調和平均の間には不等式

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \tag{3.2}$$

が成り立つ．

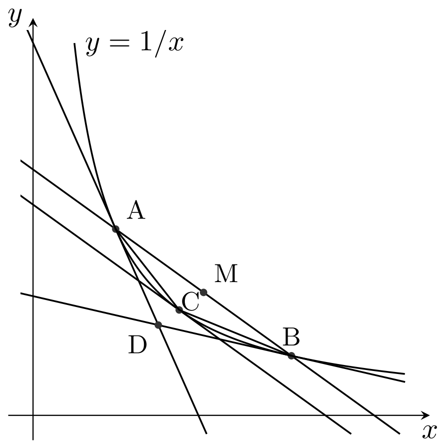

図 3

4　反比例のグラフで囲まれた図形の面積

ベルギーの数学者サン・バンサン (1584–1667) は双曲線 $y = 1/x$ の下の面積が対数の性質をもつことを発見した (カジョリ [1, p. 235])．以下，このことをなるべく少ない知識で直観的に理解できるように説明してみたい．まず図 4 における図形の面積を考える．図 4 において, 淡く塗りつぶした 2 つの長方形の面積はともに 2 である．また濃く塗りつぶした 2 つの図形の面積は，直線 $y = x$ に関して線対称であるから等しい．したがって，$y = 4/x$ のグラフの $1 \leq x \leq 2$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 S は，$y = 4/x$ のグラフの $2 \leq x \leq 4$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 S' と等しいことがわかる (図 5)：$S = S'$.

$y = 1/x$ のグラフを y 軸方向に 4 倍したものが $y = 4/x$ のグラフであることから，$y = 1/x$ のグラフの $1 \leq x \leq 2$ の部分と x

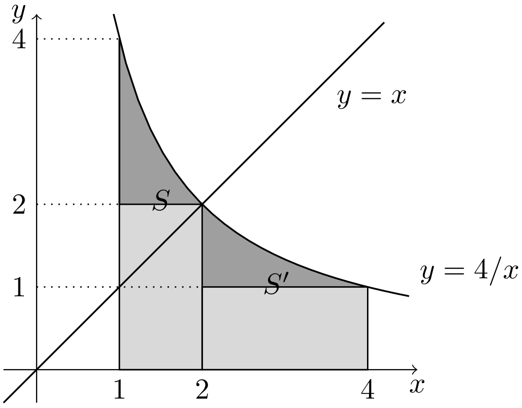

図 4　$y=4/x$ のグラフで囲まれる図形の面積

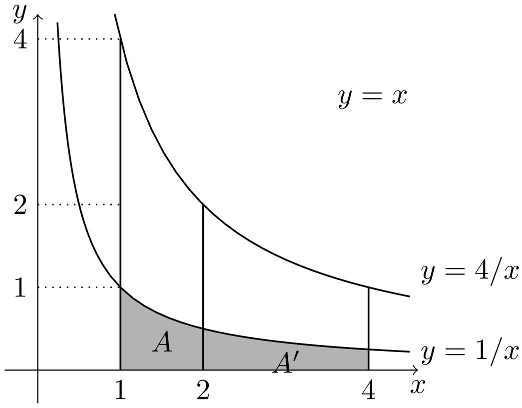

図 6　$A=A'$

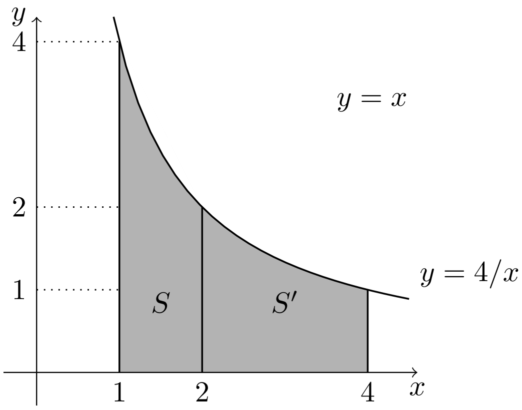

図 5　$S=S'$

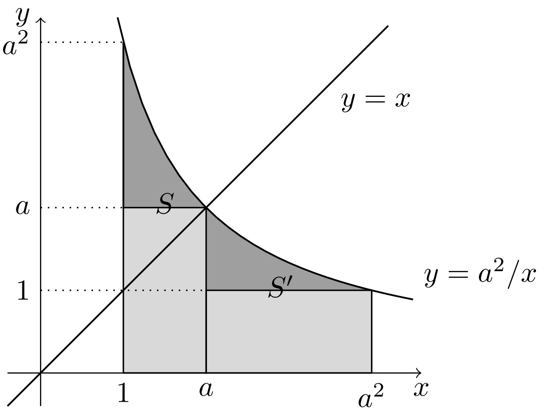

図 7　$y=a^2/x$ のグラフで囲まれる図形の面積

軸で囲まれる図形の面積 A を 4 倍したものが S に等しい (図 6)．すなわち $4A=S$ である．同様に $y=1/x$ のグラフの $2\le x\le 4$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 A' を 4 倍したものが S' に等しい．すなわち $4A'=S'$ である．$S=S'$ より $4A=4A'$，したがって $A=A'$ である (図 6).

ここまで述べてきたことを一般化する．2 を $a>1$ で置き換えて，反比例のグラフ $y=a^2/x$ を考える．図 7 において淡く塗りつぶした 2 つの長方形の面積はともに $a(a-1)=1\times(a^2-a)$ である．また濃く塗りつぶした 2 つの図形の面積は，直線 $y=x$ に関して線対称であることから等しい．したがって $y=a^2/x$ のグラフの $1\le x\le a$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 S は，$y=a^2/x$ のグラフの $a\le x\le a^2$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 S' と等しいことがわかる．$y=1/x$ のグラフを y 軸方向に a^2 倍したものが $y=a^2/x$ のグラフであることから $y=1/x$ のグラフの $1\le x\le a$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 A を a^2 倍したものが S に等しい：$a^2A=S$．同様に $y=1/x$ のグラフの $a\le x\le a^2$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 A' を a^2 倍したものが S' に等しい：$a^2A'=S'$．$S=S'$ より $a^2A=a^2A'$，したがって $A=A'$ である (図 8).

$b>1$ に対して $y=1/x$ のグラフの $1\le x\le b$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を $L(b)$ で表す．上で示したことは $L(a^2)=$

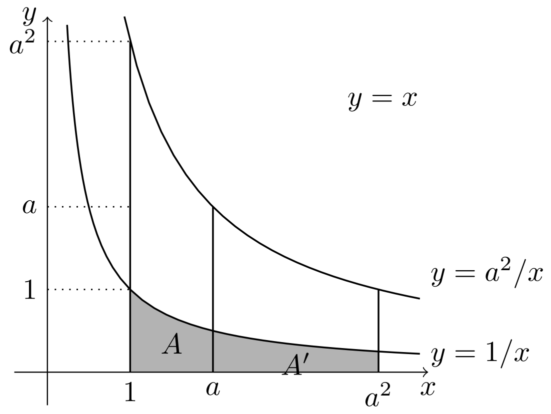

図 8　$A = A'$

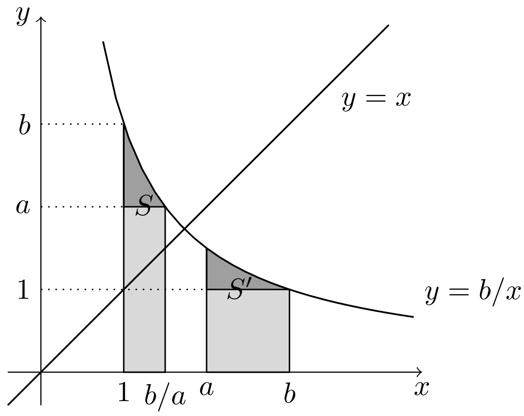

図 9　$y = b/x$ のグラフで囲まれる図形の面積

$A + A' = 2A = 2L(a)$ と表せるから，一般に $a > 1$ に対して

$$L(a^2) = 2L(a) \tag{4.1}$$

が成り立つ．

(4.1) をさらに一般化する．まず $1 < a < b \leq a^2$ とする．定義により $L(b) - L(a)$ は $y = 1/x$ のグラフの $a \leq x \leq b$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積である．したがって $y = b/x$ のグラフの $a \leq x \leq b$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積は

$$S' = b\{L(b) - L(a)\} \tag{4.2}$$

である．同様に $y = b/x$ のグラフの $1 \leq x \leq b/a$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積は

$$S = bL(b/a) \tag{4.3}$$

である．図 9 において淡く塗りつぶした 2 つの長方形の面積は，ともに $a(b/a - 1) = 1 \times (b - a)$ である．また濃く塗りつぶした 2 つの図形の面積は，直線 $y = x$ に関して線対称であることから等しい．よって $S = S'$ である．(4.2), (4.3) より $1 < a < b \leq a^2$ のもとで

$$L(b/a) = L(b) - L(a) \tag{4.4}$$

を得る．任意の $a > 1$ と任意の自然数 k に対して，$a^k < a^{k+1} \leq a^{2k} = (a^k)^2$ が成り立つ．したがって (4.4) より

$$L(a) = L(a^{k+1}) - L(a^k) \tag{4.5}$$

を得る．定義より $L(1) = 0$ であることから (4.5) は $k = 0$ のときも成り立つ．任意の自然数 n に対して (4.5) を $k = 0, 1, \ldots, n-1$ について加えれば $nL(a) = L(a^n) - L(1) = L(a^n)$ となる．すなわち

$$L(a^n) = nL(a) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.6}$$

一般に $1 < a < b$ ならば，ある自然数 k について $a^k < b \leq a^{k+1} \leq (a^k)^2$ となるから，a を a^k で置き換えて (4.4) を適用すれば

$$L(b/a^k) = L(b) - L(a^k) \tag{4.7}$$

が成り立つ．$k = 1$ ならば (4.4) は成り立つ．$k \geq 2$ とすると $a^{k-1} < b/a \leq a^k \leq (a^{k-1})^2$ となるから b を b/a で，a を a^{k-1} で置き換えて (4.4) を適用すれば

$$\begin{aligned} L(b/a^k) &= L((b/a)/a^{k-1}) \\ &= L(b/a) - L(a^{k-1}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

を得る．(4.8), (4.7) より

$$L(b/a) - L(a^{k-1}) = L(b) - L(a^k),$$
$$L(b/a) = L(b) - L(a^k) + L(a^{k-1})$$

となる．ここで (4.6) より $L(a^k) = kL(a)$, $L(a^{k-1}) = (k-1)L(a)$ であるから

$$L(b/a) = L(b) - L(a)$$

を得る．すなわち (4.4) はすべての $1 < a < b$ について成り立つ．

$a > 1, b > 1$ のとき，$1 < a < ab$ となるから (4.4) より

$$L(b) = L((ab)/a) = L(ab) - L(a).$$

したがって $a > 1, b > 1$ に対して

$$L(ab) = L(a) + L(b) \tag{4.9}$$

が成り立つ．一松 [2] では $1/x$ の原始関数 $l(x)$ で $l(1) = 0$ を満たすものとして $x > 0$ における関数 $l(x)$ を定義して，これが (4.9) と同じ性質をもつことを示し，$x = l(y)$ の逆関数として指数関数 $y = \exp x$ を定義している．

5 平方根による $L(a)$ の近似計算

$a > 1$ が与えられたとき，$y = 1/x$ のグラフの $1 \le x \le a$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積 $L(a)$ の近似値を平方根を用いて計算できることを示す．$a_0 = a$ として次々に平方根をとるという漸化式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{5.1}$$

によって数列 $\{a_n\}_{n\ge0}$ を定義する．一般項は $a_n = a^{1/2^n}$ であることがわかる．(5.1) より $a_n = a_{n+1}^2$ となるので (4.1) を用いれば $L(a_n) = 2L(a_{n+1})$，したがって

$$L(a_{n+1}) = \frac{1}{2}L(a_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

である．よって

$$L(a_n) = \frac{1}{2^n}L(a) \tag{5.2}$$

が成り立つ．x 軸上の $1 \le x \le b$ の部分を一辺とし高さが $1/b$ および 1 の長方形の面積と $L(b)$ を比べれば図 10 より明らかに

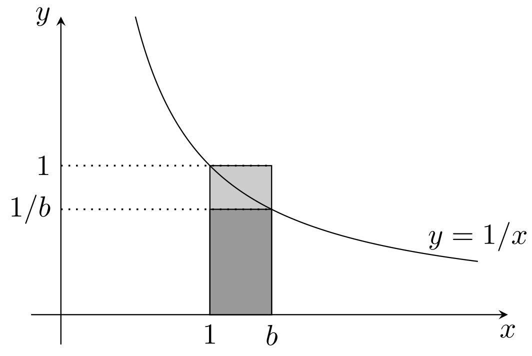

図 10　$L(b)$ の評価

$$\frac{1}{b}(b-1) < L(b) < b - 1 \tag{5.3}$$

が成り立つ．$b = a_n$ として (5.3) を用いれば

$$\frac{1}{a_n}(a_n - 1) < L(a_n) < a_n - 1$$

を得る．この不等式に 2^n をかければ (5.2) より

$$\frac{2^n}{a_n}(a_n - 1) < L(a) < 2^n(a_n - 1) \tag{5.4}$$

となる．$U_n = 2^n(a_n - 1)$, $V_n = U_n/a_n$ とおけば，(5.4) は $V_n \le L(a) \le U_n$ と表せるから

$$0 \le U_n - L(a) \le U_n - V_n \tag{5.5}$$

を得る．$\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = 0$ を示す．

$$U_n - V_n = 2^n\frac{(a_n - 1)^2}{a_n} \tag{5.6}$$

である．$a > 1$ より $a_n > 1$，よって $h_n = a_n - 1$ とおけば $h_n > 0$ となる．このとき 2 項定理により

$$a = a_n^{2^n} = (1 + h_n)^{2^n} \ge 1 + 2^n h_n,$$
$$h_1 = a - 1 \ge 2^n h_n,$$
$$h_n \le h_1/2^n.$$

したがって

$$2^n\frac{(a_n - 1)^2}{a_n} = 2^n\frac{h_n^2}{1 + h_n} \le 2^n h_n^2 \le \frac{h_1^2}{2^n}.$$

n	2^n	a_n	U_n	V_n
1	2	1.4142	0.8284	0.5858
2	4	1.1892	0.7568	0.6364
3	8	1.0905	0.7241	0.6640
4	16	1.0443	0.7084	0.6783
5	32	1.0219	0.7007	0.6857
6	64	1.0109	0.6969	0.6894
7	128	1.0054	0.6950	0.6913
8	256	1.0027	0.6940	0.6922
9	512	1.0014	0.6936	0.6927

表 1　$L(2)$ の近似値

この不等式と (5.5), (5.6) より

$$0 \leq U_n - L(a) \leq h_1/2^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n = L(a) \tag{5.7}$$

が成り立つ．

$a = 2$ として $n = 1, 2, \ldots, 9$ についてこれらを電卓で計算すると表 1 になる．表 1 から $0.6927 < L(2) < 0.6936$ を得る．$L(2) = 0.69314718\ldots$ である．

6　アルキメデスの方法による $L(a)$ の計算

アルキメデスの取り尽くし法を $y = 1/x$ のグラフに適用することによっても (5.7) と同様な結果が得られることを示す．$0 < a < b$ とし，$y = 1/x$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{A}(a, 1/a)$, $\mathrm{B}(b, 1/b)$ をとる．$y = 1/x$ のグラフと線分 AB で囲まれた図形 (図 11 の塗りつぶした部分) の面積を S とする．$m = (a+b)/2$, $g = \sqrt{ab}$, $h = 2ab/(a+b)$ とおけば，第 3 節で見たように点 $\mathrm{C}(g, 1/g)$ における $y = 1/x$ の接線は直線 AB と平行であり，A における接線と B における接線の交点は $\mathrm{D}(h, 1/m)$ であった．三角形 ABC の面積を T，三角形

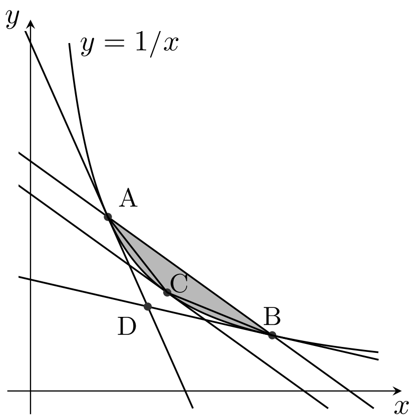

図 11

ABD の面積を T' とすれば，明らかに

$$T < S < T' \tag{6.1}$$

が成り立つ．直線 AB の方程式は

$$x + aby - a - b = 0 \tag{6.2}$$

とかけるから，点 C, D と直線 AB の距離をそれぞれ d, d' とすると

$$d = \frac{|g + ab/g - a - b|}{\sqrt{1 + a^2b^2}} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{\sqrt{1 + a^2b^2}},$$
$$d' = \frac{|h + ab/m - a - b|}{\sqrt{1 + a^2b^2}} = \frac{(b-a)^2}{(a+b)\sqrt{1 + a^2b^2}}.$$

また線分 AB の長さは

$$\sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{(b-a)\sqrt{1 + a^2b^2}}{ab}.$$

したがって

$$T = \frac{(b-a)(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{2ab},$$
$$T' = \frac{(b-a)^3}{2ab(a+b)}$$

となる．ここで $r = b/a$ とおけば $r > 1$, $b = ra$ となるから

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{(r-1)(\sqrt{r}-1)^2}{2r}, \\
T' &= \frac{(r-1)^3}{2r(r+1)}, \\
T' - T &= \frac{2\sqrt{r}(r-1)(\sqrt{r}-1)^2}{2r(r+1)} \\
&= \frac{2\sqrt{r}}{r+1}\,T \le T
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

を得る．AB のかわりに AC, CB をとって同様に三角形 $\mathrm{AC_1C}$, $\mathrm{AD_1C}$, $\mathrm{CC_1'B}$, $\mathrm{CD_1'B}$ を考える (図 12)．このとき三角形 $\mathrm{ACC_1}$ の面

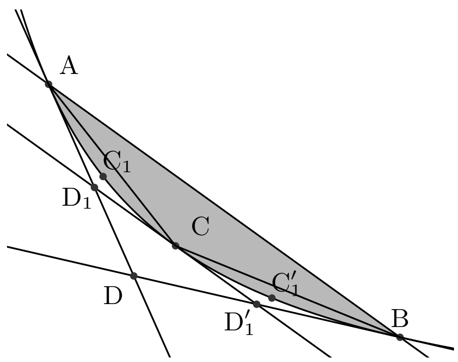

図 12　アルキメデスの取り尽くし法

積を T_1, 三角形 $\mathrm{ACD_1}$ の面積を T_1' とすれば, $g/a = \sqrt{b/a} = \sqrt{r}$ となる．よって $r_1 = \sqrt{r}$ とおけば (6.3) より

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{(r_1-1)(\sqrt{r_1}-1)^2}{2r_1}, \\
T_1' &= \frac{(r_1-1)^3}{2r_1(r_1+1)}, \\
T_1' - T_1 &\le T_1
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

を得る．$b/g = \sqrt{b/a} = \sqrt{r} = r_1$ より三角形 $\mathrm{CBC_1'}$ の面積は T_1 に等しく，三角形 $\mathrm{CBD_1'}$ の面積は T_1' に等しい．したがって

$$T + 2T_1 < S < T + 2T_1'$$

が成り立つ．この議論を繰り返せば，$r_n = r^{1/2^n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ とおいて，(6.4) において r_1 を r_n で置き換えたものによって T_n, T_n' を定めれば，$T_n' - T_n \le T_n$ であり

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k T_k < S < \sum_{k=0}^{n-1} 2^k T_k + 2^n T_n' \tag{6.5}$$

が成り立つ．

$2^n T_n$ を上から評価する．$u_n = r_n - 1$ とおけば $u_n > 0$ であり $r_n = 1 + u_n$ である．$r_n^{2^n} = r$ であり 2 項定理により

$$r = r_n^{2^n} = (1+u_n)^{2^n} \ge 1 + 2^n u_n.$$

したがって $u_n \le (r-1)/2^n$ である．よって

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{(r_n-1)(\sqrt{r_n}-1)^2}{2r_n} = \frac{u_n u_{n+1}^2}{2(1+u_n)} \\
&< \frac{u_n u_{n+1}^2}{2} \le \frac{(r-1)^3}{2^{3n+3}}, \\
2^n T_n &< \frac{(r-1)^3}{2^{2n+3}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n T_n < \frac{(r-1)^3}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{(r-1)^3}{6}.$$

すなわち無限和 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n T_n$ は収束する．

$$
\begin{aligned}
0 < S - \sum_{k=0}^{n} 2^k T_k &< 2^n (T_n' - T_n) \\
\le 2^n T_n &< \frac{(r-1)^3}{2^{2n+3}} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

より

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n T_n$$

が成り立つ．この値は $r = b/a$ のみで定まることに注意する．$\mathrm{A}'(a, 0)$, $\mathrm{B}'(b, 0)$ とすれば，図 13 から明らかに台形 $\mathrm{AA'B'B}$ の面積から S を引いたものが $L(b) - L(a)$ である．この台形の面積は

$$\frac{1}{2}(b-a)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2ab} = \frac{r^2-1}{2r}$$

となるので

$$L(b) - L(a) = \frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n T_n$$

が成り立つ．この右辺も $r = b/a$ のみで定まるから，$L(b) - L(a)$ も $r = b/a$ のみで定まることがわかる．したがって

$$L(b) - L(a) = L(r) - L(1) = L(b/a)$$

が成り立ち，等式 (4.4) が再び証明された．

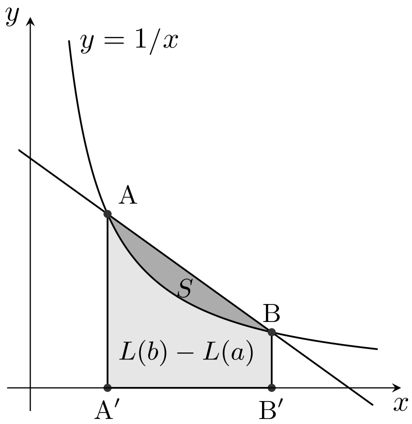

図 13　S と $L(b) - L(a)$ の関係

次に

$$L(r) = \frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k T_k$$

を簡単な極限の形に書き直す．

$$\begin{aligned}
&\frac{r^2 - 1}{2r} - T_0 \\
&= \frac{r^2 - 1}{2r} - \frac{(r-1)(\sqrt{r}-1)^2}{2r} \\
&= \frac{r_1^2 - 1}{r_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{r^2 - 1}{2r} - T_0 - 2T_1 \\
&= \frac{r_1^2 - 1}{r_1} - \frac{(r_1-1)(\sqrt{r_1}-1)^2}{r_1} \quad = \frac{2(r_2^2 - 1)}{r_2}.
\end{aligned}$$

したがって

$$(6.6) \quad \frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k T_k = \frac{2^{n-1}(r_n^2 - 1)}{r_n}$$

となることが予想される．これが正しいとすると

$$\begin{aligned}
&\frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^{n} 2^k T_k \\
&= \frac{2^{n-1}(r_n^2 - 1)}{r_n} - 2^n T_n \\
&= \frac{2^{n-1}(r_n^2 - 1)}{r_n} - \frac{2^n(r_n - 1)(\sqrt{r_n} - 1)^2}{2r_n} \\
&= \frac{2^n(r_{n+1}^2 - 1)}{r_{n+1}}
\end{aligned}$$

となる．よって帰納法によりすべての自然数 n に対して (6.6) が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
L(r) &= \frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k T_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k T_k \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}(r_n^2 - 1)}{r_n}
\end{aligned}$$

を得る．$r_n = r^{1/2^n}$ であり，$r_n = 1 + u_n$, $0 < u_n \leq (r-1)/2^n$ となるから, $n \to \infty$ のとき $u_n \to 0$, $r_n \to 1$, $(r_n + 1)/(2r_n) \to 1$ である．したがって $r_n = r^{1/2^n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ とするとき

$$(6.7) \qquad \begin{aligned} L(r) &= \lim_{n\to\infty} 2^n (r_n - 1) \frac{r_n + 1}{2r_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^n (r_n - 1). \end{aligned}$$

これは (5.7) と同じ結果である．

7　指数関数の導関数

(5.7) あるいは (6.7) より $a > 1$ とするとき

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} 2^n \left(a^{1/2^n} - 1 \right)$$

である．$h_n = 1/2^n$ とおけば $n \to \infty$ のとき $h_n \to 0$ となるから，上の式は

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{h_n} - 1}{h_n}$$

とかきなおせる．連続的に $h>0$ を 0 に近づけるときの極限も同様に $L(a)$ になることを示す．そのために $b_n = a^{1/n}$ とおく．$a = b_n^n$ より (4.6) より $L(a) = nL(b_n)$ である．$b = b_n$ として (5.3) を適用すれば

$$\frac{b_n - 1}{b_n} < L(b_n) < b_n - 1$$

が成り立つ．この不等式に n をかければ

$$\frac{n(b_n-1)}{b_n} < L(a) < n(b_n - 1) \tag{7.1}$$

となる．これから

$$\begin{aligned} &0 < n(b_n-1) - L(a) \\ &\quad < n(b_n - 1) - \frac{n(b_n-1)}{b_n} = \frac{n(b_n-1)^2}{b_n} \end{aligned}$$

を得る．ここで $k_n = b_n - 1$ とおけば $a > 1$ より $b_n > 1$，よって $k_n > 0$ であり，$a = b_n^n = (1+k_n)^n$ である．上の不等式は

$$0 < nk_n - L(a) < \frac{nk_n^2}{1+k_n} < nk_n^2 \tag{7.2}$$

となる．2 項定理により

$$\begin{aligned} a = (1+k_n)^n \geq 1 + nk_n, \\ k_1 = a - 1 \geq nk_n, \\ k_n \leq k_1/n. \end{aligned}$$

したがって (7.2) より

$$\begin{aligned} 0 < nk_n - L(a) < nk_n^2 \\ \leq \frac{k_1^2}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

となる．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} nk_n = \lim_{n\to\infty} \frac{nk_n}{b_n} = L(a) \tag{7.3}$$

が成り立つ．連続的に $h > 0$ を 0 に近づけるとき，$n \in \mathbb{N}$ を $n \leq 1/h < n+1$ にとれば，$1/(n+1) < h \leq 1/n$ より

$$\begin{aligned} b_{n+1} = a^{1/(n+1)} < a^h \leq a^{1/n} = b_n, \\ k_{n+1} < a^h - 1 \leq k_n, \end{aligned}$$

$$\frac{k_{n+1}}{h} < \frac{a^h - 1}{h} \leq \frac{k_n}{h} \tag{7.4}$$

が成り立つが，不等式

$$\frac{k_n}{h} < (n+1)k_n, \quad \frac{k_{n+1}}{h} \geq nk_{n+1}$$

と (7.3) より

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}(n+1)k_n \\ &= \lim_{n\to\infty} nk_n \cdot \frac{n+1}{n} = L(a), \\ &\lim_{n\to\infty} nk_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}(n+1)k_{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} = L(a) \end{aligned}$$

となることから，$n \to \infty$ のとき不等式 (7.4) の両側はともに $L(a)$ に収束する．以上により

$$\lim_{h\to+0} \frac{a^h-1}{h} = L(a)$$

が証明された．特に $\lim_{h\to+0}(a^h - 1) = 0$ である．したがって

$$\begin{aligned} \lim_{h\to-0} \frac{a^h-1}{h} &= \lim_{h\to+0} \frac{a^{-h}-1}{-h} \\ &= \lim_{h\to+0} \frac{a^h-1}{h} \cdot \frac{1}{a^h} \\ &= L(a) \cdot \frac{1}{1} = L(a). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{h\to0} \frac{a^h-1}{h} = L(a) \tag{7.5}$$

が成り立つ．これは**指数関数** a^x が $x=0$ において微分可能であり，微分係数が $L(a)$ に等しいことを示している．任意の実数 x に対して，指数法則 $a^{x+h} = a^x a^h$ を用いれば

$$\begin{aligned} \lim_{h\to0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} &= \lim_{h\to0} \frac{a^h-1}{h} \cdot a^x \\ &= L(a)a^x \end{aligned}$$

となり，a^x はいたるところ微分可能であってその導関数は $L(a)a^x$ であることがわかる．

8　自然対数の底 e

実数 $a>0$ に対して $\ln a$ を次のように定義する．

$$\ln a = \begin{cases} L(a), & a>1, \\ 0, & a=1, \\ -L(1/a), & 0<a<1. \end{cases} \tag{8.1}$$

$\ln a$ を a の**自然対数**とよぶ．(4.9) と上の定義から任意の正の実数 a,b に対して

$$\ln ab = \ln a + \ln b \tag{8.2}$$

が成り立つことが容易に確かめられる．関数 $\ln x$ は $x>0$ において明らかに単調増加である．$\ln 1 = 0$ であり， $\ln 2 = L(2) > 0.69$ より $\ln 4 = 2\ln 2 > 1.38 > 1$ である．したがって $1<a<4$ で $L(a)=1$ となる a がただ 1 つ存在する．この a を e とかき，**自然対数の底**とよぶ．前節の最後に述べたことにより e^x の導関数は e^x である．$L(e)=1$ となること，すなわち $\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h = 1$ となることから

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{8.3}$$

を示す．$\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h = 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1) = 1$$

である．よって $\delta_n = n(e^{1/n}-1)-1$ とおけば，$\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ である．このとき

$$e^{1/n} = 1+\frac{1+\delta_n}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\delta_n}{n+1}\right)$$

となるから，両辺を n 乗して $p_n = (1+1/n)^n$ とおけば

$$e = p_n\left(1+\frac{\delta_n}{n+1}\right)^n \tag{8.4}$$

とかける．任意の $0<\varepsilon<1$ に対して n_0 を十分大にとれば $n \geq n_0$ のとき $|\delta_n|<\varepsilon$ となる．したがって $\binom{n}{k} = n!/((n-k)!k!)$ を 2 項係数とするとき，展開式

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \tag{8.5}$$

において $x = \delta_n/(n+1)$ とおけば

$$\begin{aligned} \left|\left(1+\frac{\delta_n}{n+1}\right)^n - 1\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\delta_n^k}{(n+1)^k}\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)^k}\varepsilon^k \\ &< \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < \varepsilon\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right) = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

これは $\lim_{n\to\infty}(1+\delta_n/(n+1))^n = 1$ を示している．よって (8.4) から (8.3) を得る．さらに (8.5) において $x = 1/n$ とおけば

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 3. \end{aligned}$$

よって $n\to\infty$ とすれば $e \leq \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ を得る．一方，自然数 m を固定するとき，任意の $n \geq m$ に対して

$$p_n \geq \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

である．$n\to\infty$ とすれば $e \geq \sum_{k=0}^{m} 1/k!$ を得る．m は任意なので $e \geq \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ となり，$e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ を得る．

参考文献

[1] カジョリ，初等数学史 (復刻版)，共立出版，1997.

[2] 一松信, 解析学序説 上巻, 裳華房，1962.

上越数学教育研究，第 37 号，上越教育大学数学教室，2022 年，pp. 13–18.

三角錐の体積についての考察

中川　仁
上越教育大学

1　はじめに

三角錐や円錐の体積 V は底面の面積を S, 高さを h とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh \tag{1.1}$$

という公式で与えられる．筆者は (1.1) を積分を使わずに証明できないかと考え，平行六面体と相似を使って証明できることに気づいた．この証明を 2021 年 8 月 30 日に上越教育大学附属中学校 3 年生を対象に実施した「ワクワク大学デー」における授業において解説した．本稿はその内容を再構成し発展させたものである．第 3 節の議論は積分の考え方を使っているので厳密には積分を使わない証明とはいえないかもしれない．

2　平行六面体の体積

6 面の平行四辺形で構成されている空間図形を**平行六面体**という．すべての隣り合う面が直交して，したがって各面が長方形である場合には**直方体**になる．平行六面体の体積を求める．

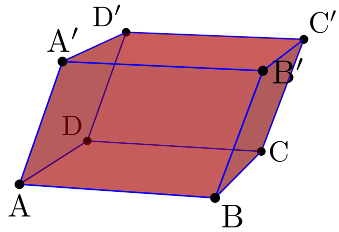

図 1　平行六面体

図 1 のような平行六面体の体積を V とする．底面の平行四辺形 ABCD の面積を S とし，高さを h とすれば，体積 V は

$$V = Sh \tag{2.1}$$

で与えられる．ただし高さとは底面 ABCD と垂直な直線 l と面 ABCD との交点を P, l と面 A′B′C′D′ との交点を P′ とするときの PP′ の長さである．

(2.1) は以下のように証明される．必要ならば合同な平行六面体を同じ方向に何個かつなぎ合わせたもの (例えば面 BCC′B′ でつなぐ) を考えることによって，線分 AB の長さは十分大きいとして体積の公式を証明すればよい．このとき線分 AB の中点を M として，M を通り直線 AB と垂直な平面を H とする．平面 H によって平行六面体を 2 つの部分に分割する．面 ADD′A′ を含む部分を W_1, 面 BCC′B′ を含む部分を W_2 とし，W_2 の面 BCC′B′ と W_1 の面 ADD′A′ が重なるように W_1 を直線 AB の方向に平行移動することにより新たな平行六面体が得られる．この新たに得られた平行六面体の底面の面積は S のままであり，高さも h のままである．さらに底面の 1 つの辺 (直線 AB の一部) と側面 (もとの平行六面体を平面 H で切った切り口) は垂直である．

そこではじめから平行六面体の底面の辺 AB と側面 ADD′A′ は垂直，辺 AB と側面 BCC′B′ は垂直であるとして (2.1) を証明すればよい．このとき面 ABCD と ABB′A′ は長方形であり，側面 BCC′B′ は平行四辺形である (図 2)．はじめと同様に必要ならば合同

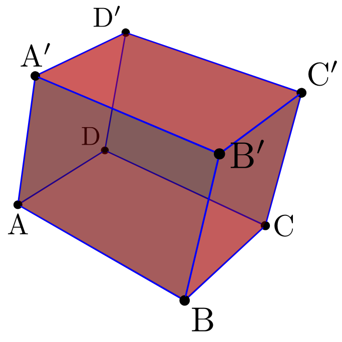

図 2　2 組の面が長方形である平行六面体

な平行六面体を直線 BC の方向に何個かつなぎ合わせたもの (面 CDD′C′ でつなぐ) を考えることによって，線分 BC の長さは十分大きいとして体積の公式を証明すればよい．このとき線分 BC の中点を N として，N を通り直線 BC と垂直な平面を K とする．平面 K によって平行六面体を 2 つの部分に分割する．面 ABB′A′ を含む部分を U_1，面 DCC′D′ を含む部分を U_2 とし，U_2 の面 DCC′D′ と U_1 の面 ABB′A′ が重なるように U_1 を直線 BC の方向に平行移動することにより新たな平行六面体が得られる．この新たに得られた平行六面体は，底面の面積が S，高さが h の直方体である．よって体積は Sh である．以上により (2.1) が証明された．

3　相似な空間図形の体積

一般に 2 つの空間図形 U, U' が相似であり，その相似比が $1 : k$ ならば，体積の比は $1 : k^3$ である．これは次のように証明される．

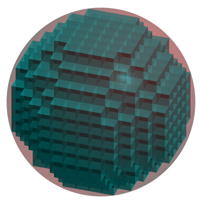

図 3　球に含まれる立方体の和

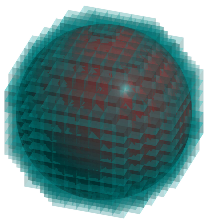

図 4　球を含む立方体の和

空間図形 F の体積を $v(F)$ で表すことにする．P を U に含まれるような N 個の 1 辺 a の立方体からなる空間図形とし，Q を U を含むような M 個の 1 辺 a の立方体からなる空間図形とする (U が球のとき，P は図 3，Q は図 4 のようなものになる)．$P \subset U \subset Q$ より

$$v(P) \leq v(U) \leq v(Q) \tag{3.1}$$

が成り立つ．P, U, Q を k 倍することにより，空間図形 P', U', Q' を得る．ここで $P' \subset U' \subset Q'$ であり，P' は N 個の 1 辺 ka の立方体からなる空間図形であり，Q' は M 個の 1 辺 a の立方体からなる空間図形である．$P' \subset U' \subset Q'$ より

$$v(P') \leq v(U') \leq v(Q')$$

が成り立つ．

$$v(P') = N(ka)^3 = k^3Na^3 = k^3v(P),$$
$$v(Q') = M(ka)^3 = k^3Ma^3 = k^3v(Q)$$

より

$$k^3v(P) \leq v(U') \leq k^3v(Q) \tag{3.2}$$

を得る．a を小さくすることにより (3.1) において $v(P)$, $v(Q)$ はいくらでも $v(U)$ に近くできるから，(3.2) により $v(U') = k^3v(U)$ が成り立つことがわかる．

4　三角錐の体積

前節において，2 つの空間図形 U, U' が相似であり，その相似比が $1 : k$ ならば体積の比は $1 : k^3$ であることを示した．特に U を三角錐とし，U' を U を 2 倍にした三角錐とすれば，U' の体積 $v(U')$ は U の体積 $v(U)$ の $2^3 = 8$ 倍になる：

$$v(U') = 8v(U). \tag{4.1}$$

このことと平行六面体の体積の公式 (2.1) を用いて，三角錐の体積の公式 (1.1) を証明する．

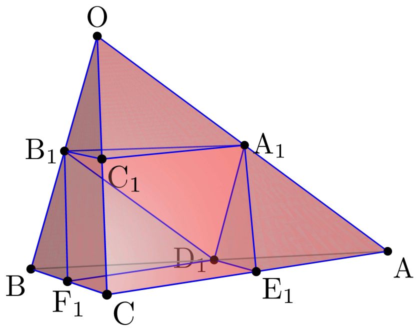

図 5　三角錐の分割

三角錐 U' の頂点を O, A, B, C とし，U' の 6 つの辺 OA, OB, OC, AB, AC, BC の中点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$ とする (図 5)．このとき 3 つの三角錐 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$, $\mathrm{A_1AD_1E_1}$, $\mathrm{B_1D_1BF_1}$ はすべて U と合同である．三角錐 U' からこの 3 つの三角錐を取り除いて得られる空間図形を W とする．W の体積は $5v(U)$ に等しい．実際,

$$\begin{aligned} v(W) &= v(U') - 3v(U) = 8v(U) - 3v(U) \\ &= 5v(U). \end{aligned}$$

W は 3 つの平行四辺形の面と 4 つの三角形の面をもつ図 6 のような空間図形である．

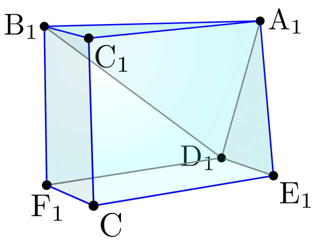

図 6　空間図形 W

W の 3 つの平行四辺形の面 $\mathrm{A_1C_1CE_1}$, $\mathrm{B_1F_1CC_1}$, $\mathrm{F_1CE_1D_1}$ のそれぞれを平行移動して得られる平行六面体を $\widetilde{W}$ とする．$\widetilde{W}$ は W に平面 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ 上の点 $\mathrm{C_1'}$ を四角形 $\mathrm{A_1C_1'B_1C_1}$ が平行四辺形になるようにとることによって得られる平行六面体である (図 7).

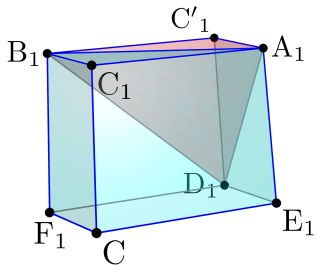

図 7　平行六面体 $\widetilde{W}$ の W と $\widetilde{U}$ への分割

三角錐 $\mathrm{B_1D_1BF_1}$ を U とし，三角錐 $\mathrm{D_1B_1A_1C_1'}$ を $\widetilde{U}$ とする．U と $\widetilde{U}$ が合同であることを示そう．そのためには第 7 節で述べる三角錐の合同条件により，対応する 6 つの辺の長さがそれぞれ等しいことを示せばよい．まず四角形 $\mathrm{B_1C_1A_1C_1'}$ は平行四辺形だからこれを対角線 $\mathrm{B_1A_1}$ で 2 つの三角形 $\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$ と $\mathrm{B_1A_1C_1'}$ にわければ，この 2 つの三角形は合同である．すなわち $\triangle\mathrm{A_1B_1C_1} \equiv \mathrm{B_1A_1C_1'}$ である．また三角錐 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ は三角錐 $U = \mathrm{B_1D_1BF_1}$ と合同だから，$\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$ は $\triangle\mathrm{D_1BF_1}$ と合同である．よって $\triangle\mathrm{D_1BF_1} \equiv \triangle\mathrm{A_1B_1C_1} \equiv \mathrm{B_1A_1C_1'}$ である．したがって

$$\mathrm{D_1B} = \mathrm{B_1A_1},\ \mathrm{D_1F_1} = \mathrm{B_1C_1'},\ \mathrm{BF_1} = \mathrm{A_1C_1'}$$

が成り立つ．四角形 $\mathrm{B_1F_1D_1C_1'}$ は平行四辺形だから

$$\mathrm{B_1F_1} = \mathrm{D_1C_1'}$$

である．また三角錐 $U = \mathrm{B_1D_1BF_1}$ は三角錐 $\mathrm{A_1AD_1E_1}$ と合同だから

$$\mathrm{B_1B} = \mathrm{A_1D_1}$$

である．$\mathrm{B_1D_1} = \mathrm{D_1B_1}$ は自明である．以上により三角錐 $U = \mathrm{B_1D_1BF_1}$ と三角錐 $\widetilde{U} = \mathrm{D_1B_1A_1C_1'}$ の対応する 6 つの辺の長さがそれ

ぞれ等しいことがいえた．ゆえに $U \equiv \widetilde{U}$ である ($\widetilde{U}$ は U の鏡映を平行移動と回転移動して得られるものである).

$v(W) = 5v(U)$ であり，平行六面体 $\widetilde{W}$ は W と $\widetilde{U}$ からなるから

$$v(\widetilde{W}) = v(W) + v(U) = 6v(U). \tag{4.2}$$

はじめに与えられた三角錐 $U' = \mathrm{OABC}$ の底面 $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とし, 高さを h とすると, 三角錐 $U = \mathrm{B_1D_1BF_1}$ の底面 $\triangle\mathrm{D_1BF_1}$ の面積は $\frac{1}{4}S$ であり, 高さは $\frac{1}{2}h$ である．平行六面体 $\widetilde{W}$ の底面 $\mathrm{F_1CE_1D_1}$ の面積は $\triangle\mathrm{D_1BF_1}$ の面積の 2 倍だから $\frac{1}{2}S$ であり，高さは $\frac{1}{2}h$ である．平行六面体の体積の公式 (2.1) より

$$v(\widetilde{W}) = \frac{1}{2}S \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}Sh$$

である．(4.2) より

$$v(U) = \frac{1}{6}v(\widetilde{W}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}Sh = \frac{1}{24}Sh$$

である．したがって三角錐 U' の体積は

$$v(U') = 8v(U) = 8 \times \frac{1}{24}Sh = \frac{1}{3}Sh$$

である．以上により三角錐の体積の公式 (1.1) が証明された．

5　一般の錐体の体積

一般に空間において，平面 H 上に面積 S をもつ図形 A があるとし，平面 H 上にない点 O をとって，点 O と A の点 P とを結んだ線分 OP 上のすべての点 Q からなる空間図形を錐 $\mathrm{O}A$ という (図 8)．またこのような空間図形を一般に**錐体**という．

$$\mathrm{O}A = \{\mathrm{Q} \,|\, \mathrm{Q} \text{ は線分 OP 上の点，} \mathrm{P} \in A\}.$$

特に平面図形 A が多角形のとき，錐 $\mathrm{O}A$ を**多角錐**という．多角錐 $\mathrm{O}A$ の体積については，多角形 A をいくつかの三角形に分割する

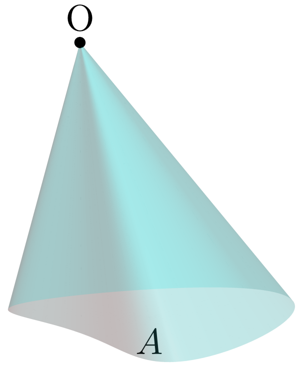

図 8　一般の錐体

ことにより三角錐の体積の公式から容易に公式 (1.1) が成り立つことがわかる．

一般の錐 $\mathrm{O}A$ の高さを h とする．h は O から平面 H へおろした垂線と H の交点を R としたときの距離 OR である．B, C を平面 H に含まれる多角形で $B \subset A \subset C$ となるものとする．このとき 3 つの錐 $\mathrm{O}B$, $\mathrm{O}A$, $\mathrm{O}C$ の間には包含関係 $\mathrm{O}B \subset \mathrm{O}A \subset \mathrm{O}C$ が成り立つからそれらの体積について

$$v(\mathrm{O}B) \leq v(\mathrm{O}A) \leq v(\mathrm{O}C)$$

が成り立つ．B, C の面積を $s(B)$, $s(C)$ で表せば，多角錐 $\mathrm{O}B$ の高さも多角錐 $\mathrm{O}C$ の高さも h だから $v(\mathrm{O}B) = \frac{1}{3}s(B)h$, $v(\mathrm{O}C) = \frac{1}{3}s(C)h$ である．したがって

$$\frac{1}{3}s(B)h \leq v(\mathrm{O}A) \leq \frac{1}{3}s(C)h \tag{5.1}$$

が成り立つ．多角形 B の面積 $s(B)$, 多角形 C の面積 $s(C)$ は A の面積 S にいくらでも近くとれるから，不等式 (5.1) から錐 $\mathrm{O}A$ の体積 $v(\mathrm{O}A)$ は $\frac{1}{3}Sh$ に等しくなければならない．以上により一般の錐体に対しても公式 (1.1) が成り立つことが証明された．

6　空間における合同変換

空間における 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ で表す．空間上の変換 f が**合同変換**であると

は，任意の 2 点 P, Q に対して

$$d(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})) = d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$$

が成り立つことをいう．

すべての点 P に対して P 自身を対応させる恒等変換を id で表せば，id は合同変換である．f, g が合同変換ならば合成変換 $f \circ g$ も合同変換である．平行移動，回転移動 (直線を回転軸とする)，鏡映 (平面に関する対称移動) は合同変換である．これらはどれも明らかに逆変換をもち，平行移動，回転移動，鏡映の逆変換はそれぞれ平行移動，回転移動，鏡映である．空間上の任意の合同変換 f は高々 4 個の鏡映の合成として表されることが知られている ([1, 定理 1.7])．

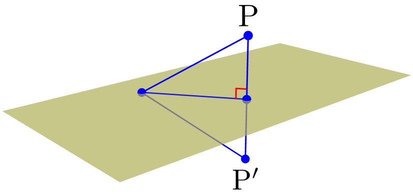

図 9　平面に関する鏡映

球面の交わりに関して次の 2 つの事実 (S1), (S2) を示しておく．(S1) は (S2) を示すときに使い，(S2) は次節において用いる：

(S1) O_1, O_2 を空間における異なる 2 点とする．O_i を中心とする球面 S_i $(i = 1, 2)$ について，$S_1 \cap S_2$ が 2 個以上の点を含むならば $S_1 \cap S_2$ は円である．円 $S_1 \cap S_2$ を含む平面は中心を通る直線 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ と垂直である．$S_1 \cap S_2$ が 1 点 P ならば，P は直線 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ 上の点であり，2 つの球面は点 P で接している．

(S2) A_1, A_2, A_3 を空間における同一直線上にない 3 点とし，A_1, A_2, A_3 を含む平面を H とする．A_i を中心とする球面 S_i $(i = 1, 2, 3)$ について，$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$ ならば $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 1 点または 2 点である．$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 2 点 P_1, P'_1 の場合は P_1 と P'_1 は平面 H に関して対称である．$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点 P の場合は，P は平面 H 上にある．

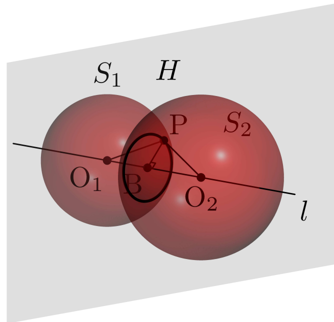

図 10　球面と球面の交わりは円

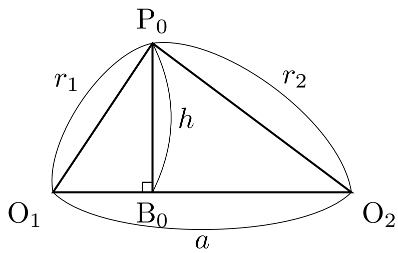

図 11　$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$

(S1) の証明．直線 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ を l で表し，$\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2 = a$ とおく．$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ とし，点 $P_0 \in S_1 \cap S_2$ をとる．点 P_0 から直線 l におろした垂線と l の交点を B_0 とする．$h_0 = \mathrm{B}_0\mathrm{P}_0$ とおく．$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ について考える．図 11 のようにこの三角形の三辺は $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2 = a$, $\mathrm{O}_1\mathrm{P}_0 = r_1$, $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_0 = r_2$ であり，P_0 のとり方によらずに一定である．したがって $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ を底辺としたときの高さ h も一定である．さらに点 B_0 も P_0 のとり方によらずに一定である．したがって点 B_0 を通り直線 $l = \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ と垂直な平面を H_0 とすれば，$P_0 \in H_0$ であり，H_0 も P_0 のとり方によらずに一定である．いま $S_1 \cap S_2 \supsetneq \{P_0\}$ として点 $\mathrm{P}_1 \in S_1 \cap S_2$, $\mathrm{P}_1 \neq \mathrm{P}_0$ をとる．上に述べたことにより $P_1 \in H_0$ である．$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ は $S_1 \cap H_0$ の異なる 2 点だから $S_1 \cap H_0$ は B_0 を中心とする平面 H_0 上の半径 h の円 C であ

る．同様に $S_2 \cap H_0 = C$ である．以上により $S_1 \cap S_2 \subset C = (S_1 \cap H_0) \cap (S_2 \cap H_0) \subset S_1 \cap S_2$ となって，$S_1 \cap S_2 = C$ を得る．

次に $S_1 \cap S_2$ が 1 点 P_0 であるとする．このとき $\mathrm{P}_0 = \mathrm{B}_0$ は直線 $l = \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ 上の点である．P_0 において直線 l と垂直に交わる平面を H とすれば，S_1，S_2 ともに P_0 において平面 H と接している．

(S2) の証明．S_i $(i = 1, 2, 3)$ は平面 H に関して対称だから，$\mathrm{P} \in S_1 \cap S_2 \cap S_3, \mathrm{P} \notin H$ ならば H に関して P と対称な点 P' も $\mathrm{P}' \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$ を満たす．したがって $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 2 点以上の点からなる．ゆえに $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点 P ならば $\mathrm{P} \in H$ である．

$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 2 点以上からなるとする．$C_{12} = S_1 \cap S_2$ とおくと (S1) より C_{12} は円であり，C_{12} を含む平面 H_{12} は直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と垂直である．同様に $C_{13} = S_1 \cap S_3$ とおくと C_{13} は円であり，C_{13} を含む平面 H_{13} は直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$ と垂直である．A_1，A_2，A_3 は同一直線上にないから H_{12} と H_{13} は異なる平面であり，H_{12} と H_{13} は平行ではない．よって $m = H_{12} \cap H_{13}$ は直線である．$C_{12} \subset H_{12}$，$C_{13} \subset H_{13}$ より $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = C_{12} \cap C_{13} \subset H_{12} \cap H_{13} = m$，よって

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \subset C_{12} \cap m. \tag{6.1}$$

C_{12} と m は平面 H_{12} 上の円と直線だからその交点は高々 2 点である．(6.1) より $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ はちょうど 2 点 P, Q からなる．もし P, Q がともに H 上にあるとすれば，$\mathrm{A}_i\mathrm{P} = \mathrm{A}_i\mathrm{Q}$ $(i = 1, 2, 3)$ より平面 H 上の 3 つの円 $H \cap S_i$ の中心 A_i は PQ の垂直二等分線上にあることになり同一直線上にないという仮定に矛盾する．ゆえに P, Q の少なくとも一方は H 上にない．P が H 上にないとしてよい．このとき H に関する P の対称点 P' も $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ 上にあるから，$\mathrm{Q} = \mathrm{P}'$ でなければならない．

7　三角錐の合同条件

三角錐の合同条件　空間における 2 つの三角錐 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ と $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4$ について，6 つの辺の長さが等しい，すなわち

$$\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j = \mathrm{B}_i\mathrm{B}_j \qquad (1 \leq i < j \leq 4)$$

ならば，この 2 つの三角錐は合同である．

これは次のように証明される．適当な合同変換により，面 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ と面 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3$ が同じ平面 H 上にあるとしてよい．$\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ と $\triangle\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3$ は合同だから適当な合同変換により $\triangle\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3$ を $\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ に重ね合わせることができる．すなわち $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1$，$\mathrm{B}_2 = \mathrm{A}_2$，$\mathrm{B}_3 = \mathrm{A}_3$ であるとしてよい．このとき $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_4 = \mathrm{A}_i\mathrm{B}_4$ $(i = 1, 2, 3)$ である．$r_i = \mathrm{A}_i\mathrm{A}_4$ $(i = 1, 2, 3)$ とおいて，A_i を中心とする半径 r_i の球面を S_i とする：

$$S_i = \{\mathrm{P} \mid \mathrm{A}_i\mathrm{P} = r_i\} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

$\mathrm{A}_4, \mathrm{B}_4 \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は平面 H 上にないから前節の (S2) により $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は H に関して対称な 2 点からなる．ゆえに $\mathrm{B}_4 = \mathrm{A}_4$ であるかまたは $\mathrm{B}_4 = \mathrm{A}_4'$ である．ここで A_4' は A_4 と H に関して対称な点である．前者の場合は 2 つの三角錐は一致し，後者の場合は一方の三角錐を H に関する鏡映でうつせばもう一方に一致する．ゆえに三角錐 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ と三角錐 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4$ は合同である．

参考文献

[1] P. M. H. ウィルソン，曲空間の幾何学，朝倉書店，2009.

新・教職課程演習　第19巻
中等数学科教育
令和3年12月25日　第1刷発行

編著者　礒田正美©
　　　　影山和也©
発行者　小貫輝雄
発行所　協同出版株式会社
〒101-0054　東京都千代田区神田錦町2-5
電話　03-3295-1341（営業）　03-3295-6291（編集）
振替　00190-4-94061
印刷所　協同出版・POD工場

ISBN978-4-319-00361-7

第4章

中学校・高等学校数学科の評価法

Q 22 評価の多様な意味を整理しなさい

評価は，評価対象，評価主体，評価基準にかかる価値判断行為であり，評価主体が自身であれば自己評価，他者であれば他者評価，その結果は評価基準次第である。教育評価では，評価対象に対するフィードバックが評価結果に含まれる。フィードバックは，評価基準に準じて，今後への改善目的でなされ，入試などの選考と区別される。教師の評価対象は，自身の指導計画，自身の指導過程，個別生徒，同僚，学校組織など多岐に渡る。

教師の日常で特徴的なことは，生徒を含む他者に思い･願いを語り続け，その実現のための計画をし，実現に向けて努力する点にある。特に教師として生きる喜びを味わうのは，その思い･願いを，生徒の反応や姿に認めたときである。認めることができるのはその瞬間の場合もあれば，将来の場合もある。評価基準は，教師の信念や価値観，理想･道徳心，目的･目標などに依存する。そこでは，個別生徒，同僚，保護者との目標の共有，評価基準の共有が欠かせない。個別生徒の進歩や改善を求める教師は，評価基準の言語化を常に求められる。それは説明責任を問われる教師の営為でもある。

特に学校教育法上の学校に所属する教師は，最低基準としての学習指導要領，学校毎の教育課程に準じ，記録簿としての生徒指導要録に際し，目標に準拠した評価を行う。それぞれの人間性を前提とする教師の行う評価では，自身が暗黙に抱く内的価値観と，これら外的評価基準とを統合して臨む必要がある。その統合を生み出すのは研修である。指導と評価は，カリキュラムマネジメントの基幹であり，その実現のために評価基準を共有するは研修が，個人，校内，教育委員会と様々なレベルでなされ，その研鑽成果が指導計画に反映される。研修と研鑽を積めばこそ，基準は教師自身の言葉で，思い，願いとして語られ，それを実現する授業で生徒と共有しえるようになる。

1．診断的評価，形成的評価，総括的評価

数学科の学習指導は既習を活かすことで実現する。特に，文部科学省で

は，教育課程基準の実現を意図して，目標に準拠した評価，指導と評価の一体化を求めてきた。それは次の３つの評価で区分できる。

診断的評価とは，単元前に，その単元の学習の前提となる既習の理解状況を評価するものである。診断的評価で得られた既習の理解状況から，単元での教材，学習内容，授業形態を考慮し直すなど，調整を図り，授業を実施していくことになる。しばしば確認テスト形式をとり，不足する既習事項を補うことがフィードバックである。テストせずとも，単元の導入題などで，生徒とやり取りする中で，既習想起を促すなども診断的評価機会となる。その目的で，最近の中学校教科書は復習ページが充実しているが，高等学校教科書では稀有であり，必要な既習を事前確認することは教師の役割である。

形成的評価とは，単元内の学習指導過程で，指導目的でなされる評価すべてである。それは例えば，用意した問題や発問に対して，生徒の反応を評価し，その後の展開を選択判断し，教室全体に対しての指導内容や展開を改めていく評価もあれば，授業後半で出す確認問題で個別生徒の理解状況を把握し個別生徒の復習事項を定める評価もある。それは，生徒の学力改善に不可欠なフィードバックとしての指導内容を用意することでもあり，それは続く授業で何を既習としえるかを明確にする行為でもある。

総括的評価とは，生徒指導要録などで，評定目的でなされる評価である。教師は，形成的評価の対象である生徒を，その生徒のパフォーマンス情報の累積と単元終了時などでなされるテストの得点などを加味して総合的に評定する。指導としての評価の立場からはパフォーマンス情報はその都度形成的評価目的でなされると同時に，情報更新を含みつつ，評定で活用する。

2．相対評価と絶対評価

評定は，絶対評価と相対評価で区別される。絶対評価とは，教育目標や内容を生徒が達成したか否かを評価するものである。生徒指導要録は，絶対評価による評定を求めている。絶対評価は，個別基準が達成したか否かという意味では，論理的には二値で足りる。他方，単元や学期を通してのパフォーマンスの累積結果を生徒指導要録に記す評定（総括的評価）は，その二値評

定の累積からなり，努力，改善や達成の深さの様相を表す意味で多値化が必然となる。中学校指導要録数学科の場合，目標の３柱にかかる観点別学習状況を知識･技能，思考･判断･表現，主体的に学習に取り組む態度を，「十分満足できる」をA，「おおむね満足できる」をB，「努力を要する」をCとする。総合評定は５段階で「十分満足できるもののうち，特に程度が高い」を5，「十分満足できる」を4，「おおむね満足できる」を3，「努力を要する」を2，「一層努力を要する」を1としている。指導過程でなされる形成的評価では，生徒のパフォーマンスをその時点でA～C判定したとしても，それは仮判定であり，後にパフォーマンスが改善されれば判定は修正対象にもなる。最終評定では，その累積と最終テスト結果を総合する。

例えば，事象のなかの数量やその関係に着目し，一元一次方程式をつくることができるかどうか，或いは正弦定理や余弦定理を三平方の定理と関連づけることができるかどうかは，指導過程での評定であり，それは記録簿に記載される。単元末，一元一次方程式全体，三角関数全体となれば，学びの進展や深さを記した記録簿とテスト結果を総合することとなる。

相対的評価とは，特定集団内での個人の成績を他者との比較相対として位置付ける評定であり，序列や正規分布を利用して示される。長所は，特定の学級･学年集団内における個別生徒の位置を示す点にあり，進路指導では生徒･保護者にわかりやすい指標となる。短所は序列固定である。下位にいる者の奮闘は評定に容易に現れない。現在，生徒指導要録の評定は絶対評価であるが，かつて中学校では，相対評価比率７％，24％，38％，24％，７％を利用した時代がある。正規分布，標準偏差1σを基準に定める偏差値の場合，偏差値80が0.13％，80～70が2.14％，60～50が34.13％（以降対称）である。得点分布を正規化することの問題は，数学成績に多い２峰分布をベル型に正規化する点であり，学校間格差や模擬試験の相違など対象集団の違いが偏差値には現れない点にある。国際学力調査PISAやTIMSSなど，実施時期や集団が様々で，設題が漏れる危険のある標準テストは，設題群から問題を抽出して構成し，異なるテストでも比較しえるよう項目反応理論が利用される。

（高橋　等）

Q 23　数学科における指導と評価の一体化を実現するための方法を述べなさい

1．指導と評価の一体化

指導と評価の一体化とは，教育目標３柱に準じ，自ら学び自ら考える生徒を育成するための生徒指導の一環として指導と評価がなされることを指す。指導と評価は目標に準拠し，評価は指導の一貫，目標の実現状況の評価として計画される。教材研究，指導計画，授業デザインは，目標を学習指導へと具体化し，評価基準を探る行為を伴うものである。生徒の学びの進化や改善を目的になされる指導では，生徒との目的意識の共有，評価基準の共有も不可欠となる。実際，生徒は，その指導と評価を受ける中で自己評価基準を築き，自身の未来像，なってみたい自分を築いていく。生徒が学習に取り組む中で，できるようになった自分を認め，考え方のよさの価値を実感すればこそ，自ら学び自ら考える生徒が育つ。生徒の目的意識，自己評価基準を育てる行為まで視野に含むのが，指導としての評価である。

それは，「よくわかった……わからなかった」「できた……できなかった」「やる気が出た…出なかった」など毎回同じ様式の学習感想を機械的に課すことではない。機械的質問では，教師が教材研究の中で描いた思いや願いを生徒と共有できないし，それを生徒が受け止めたかも不明であり，授業改善のヒントもない。仮に毎回学習感想を求めるならば，教師の狙う指導計画，目標，展開に準拠し，生徒の目的意識の伸張に準じて，質問は段階的に変わってしかるべきである。

OECD教育2030では，学び方を学んだ生徒の育成をめざしている。それは数学科で言えば，問い方を学んだり，既習を拡張したり，一般化したり，既習から類推して解法を探り出したり，他の場合を考えて反例を生み出したりする数学的活動を進め，数学的な考え方を身に付け，数学の拡張性や一般性，合理性や体系性，調和性や美しさに価値を求める生徒である。目標３本柱の

もとで，主体的に学習に取り組む態度とは，自ら数学的な問いを発し，すごいと声を発する姿である。思考・判断・表現とは，既習を駆使して類推し，得られた考えを一般化したりする姿である。それが目標であること，それが数学学習の価値であることを，生徒自身が喜び味わう形で学んでいける学習指導を実現させることが，指導と評価の一体化という語で問われている。

評定を付ける段階で，名簿を見て，授業中の個別生徒の姿がそれぞれに思い浮かべることができる教師には，毎回の学習感想など不要に映る。他方，記録簿とは，個別生徒の思い・願い・不安を知り，顔をみればわかるようになるまでに指導を工夫した営みの証でもある。教師の記録簿は，生徒が目標を共有できたかに対する説明責任を担う教師にとって，生徒や保護者に評定根拠を客観的に説明し，次に役立てる情報を提供する役割を担っている。

2．ポートフォリオ評価と形成的アセスメント

教師の評価基準が言語化され，生徒の自己評価基準を形成していくことが，指導と評価では求められる。ここではさらに，自ら学び自ら考える生徒をいかに育成するか，生徒自身の自己評価を形成する方途を示す。

教師に必須の記録簿は，生徒と目標，基準が共有できたか否かを必ずしも示さない。主体的に学習に取り組む態度や，思考力・判断力・表現力は，教師がそれを学ぶプロセスを設計したとしても，生徒自身が自らの学んだ過程を振り返ればこそ学べるものである。数学科において既習とは，知識・技能だけではなく，学び方や学ぶ価値までを含む。育成したい数学的な考え方は，なされた数学的活動プロセスを振り返ることで特定しえる。数学的価値は，その考え方を感得すればこそ学びえる。それらまでを既習に，次は是非，自分も使ってみたいと考える意志を生徒に育むことは指導としての評価である。

ポートフォリオは，教師の記録簿，生徒にとっての学習録どちらも含意する。ここでは自ら学び自ら考える生徒を育てる主旨で後者に焦点を当てる。生徒自身が，目標を自覚し，自らの学習の進捗を振り返り，学ぶ価値を明かすツールとしてのポートフォリオに限定して解説する。

数学科の場合，生徒にとってのポートフォリオの典型は，生徒が自身の学

びや感想，学習計画や自習内容，復習内容までを記した学習ノートである。そこでは，通常のノート同様，問題，自身の解答，他者の解答，教師の模範解答やまとめなど教室で議論した内容を，大切な部分への朱書きとともに記すことに加えて，教師の語りや自身の内言として認めた考え方などを噴出しで記したり，練習したり発展させったりした際の自身の得た問いや考え方が記される。ワークシート，コンピュータでの探究結果，テストやアンケート結果を貼り付けるなども，次への志を得る反省材料となる。それは数学学習日記でもある。高等学校の場合，授業ノート，問題集/学参ノート，予備校や添削など，生徒側で区別する場合も多い。その場合にも，振り返って学習感想が記され，その反省を踏まえ，次への意欲や問い，計画が記されれば，知識・技能の習得としてのノートを超えたポートフォリオと言える。

ポートフォリオは自己評価対象である。難しさやわからなさへの挑戦や，それを乗り越える際に用いた考え方，そこで認められるよさ・美しさなどは，教師や仲間が，その挑戦を賛美称賛したりするなどして他者評価されれば強化され深く学習し得る。予め，他者や教師に公開する対象，他者と共有する対象として，それが作成された場合には，教師側からも，よいポートフォリオとはどのようなものか，それは何故かを生徒の事例から授業で共有することができる。その場合，ポートフォリオは，教師の評価基準を生徒と共有するツール，教師が評定する際の記録簿としても機能する。

課題学習，総合的な学習/探究の時間，理数探究などでなされるグループ学習，レポート学習では，しばしばポートフォリオが活用される。そこでなされる数学的活動は生徒自身が選んだ主題に依存する。生徒自身が，何をどう探究するかを計画実行し，教師はそれを支援する立場となる。形成的評価が教師側の指導と評価であるのに対し，それを形成的アセスメントという場合がある。それは生徒自身が自己評価としてなされる。生徒自身が目標設定に関与し，教師は生徒の数学的活動を見とりフィードバックを与え，生徒同士もフィードバックし合う。形成的アセスメントでは，教師の指導と評価の対象は，生徒自身の自己評価基準自体を発展させることにある。

（高橋　等）

Q 24 数学科におけるパフォーマンス評価の進め方を示しなさい

1．パフォーマンス評価とは

パフォーマンス評価とは，パフォーマンス課題に対する評価である。それは，ある特定の文脈のもとで，様々な知識や技能を用いて行われる人の振る舞いや作品を，直接的に評価する方法（松下，2007），あるいは，広義の知識や技能を，与えられた状況において使いこなすことを求める評価方法の総称である（西岡・石井，2019）。パフォーマンス評価の背景には，個々人の能力は課題に対するパフォーマンスから推し量ることができるに過ぎず，いくら分析的に測定し総合したとしても，それが未知の課題へのパフォーマンスに反映するとは限らないとみなす能力観がある。パフォーマンス課題では，生徒に探究レポートなどの纏まった作品づくりを求める。その課題とは，様々な知識や技能を総合して使いこなす複雑な課題であり，プレゼンテーションや実験などの実演を求める課題までも含む。数学科で言えば，数学的な探究を求める課題学習が典型である。

2．パフォーマンス課題とパフォーマンス評価

パフォーマンス課題の条件として，(a) 思考過程を表現することを要求する，(b) 多様な表現方法（式，言葉，図，絵など）が使える，(c) 真実味のある状況にある課題から数学化する過程を含んでいる，(d) 複数の解法がとれる，の５つがある（松下，2007）。(c) については，中学校・高校学校教材では，真実味のある状況課題とは，数学的モデリングを行う現実世界に限らず，数学的世界そのものである場合も多いことから，数学的世界において数学的思考を駆使する過程も含む。

数学におけるパフォーマンス課題は，中学校の全国学力・学習状況調査や大学進学に際しての共通テストの場合で言えば，記述式を伴う複雑な問題を

例にすることができる。そこでの出題では，探究課題を数学的な文脈で課す。その場合の学的活動では一般化や拡張などを伴う様々な知識やスキルを総合して用いることになる。全国学力・学習状況調査授業アイディア例（e.g., 国立教育政策研究所教育課程研究センター，2018）では，パフォーマンス課題が豊富に例示されている。そのような課題への挑戦を繰り返すことで，生徒は，課題学習，総合的な学習/探究の時間，理数探求などで，自ら課題を設定し，自己評価基準を自ら設定することもできるようになる。

パフォーマンス課題を設定する際は，パフォーマンス課題による数学的活動を実現する指導計画が必要である。学習指導要領の目標，カリキュラムマネジメントの立場からは，中学校数学，高校数学の単元は総て思考・判断・表現を求めるものであり，何れの単元でもパフォーマンス課題を設定し得る。反転学習を求めて，基礎基本は自宅で，授業ではパフォーマンス課題を行う指導計画もある。複数単元をまとめてパフォーマンス課題を用意することもできる。パフォーマンス課題では，通常，グループで調べ学習を行い，レポートを作成し，最終的にプレゼンテーションや実演を求める。パフォーマンス課題に対して，生徒自身が数学的知識を構成するという観点から，調査，実験，ICT活用，作品の生成という数学的活動を自ら取り組めるように支援する，そこでパフォーマンス評価もなし得る。

3．ルーブリックの作成

パフォーマンス評価では，その基準としてルーブリックとその記録が求められる。ルーブリックとは，成功の度合いを示す何層かの水準からなる尺度と，それぞれの水準に対応するパフォーマンスの特徴を記した記述語からなる評価基準表である（西岡・石井，2019）。例えば，「変化の割合」について，横軸に，知識・技能，思考・判断・表現，主体的に学習に取り組む態度をとり，縦軸にＡ，Ｂ，Ｃと評定を入れ，各々にはそれと判断し得る特徴を，評価基準に照らして具体的に記載する。Ａ，Ｂ，Ｃは恣意的に決められない。

パフォーマンス評価として，セルに入る記述語の作成手順は以下のようにする。①パフォーマンス課題を実施し学習者の作品を集める，或いはパ

フォーマンスを記録する，②その中で認められる特徴的な相違を，横軸ごとに区分けし，さらにA，B，Cと階層化する。

複数名で採点する場合は互いの情報を交換せず，さらに次の手順を行う。③全員が採点し終わったらそれぞれが記した付箋紙を作品の表に貼り直し，縦軸，横軸に沿って作品を比較し合い，話し合いながら記述語を作成する，④一応の記述ができたら，評価が分かれた作品やパフォーマンスについて話し合い，記述語を練る，⑤必要に応じて評価の観点を分けてフーブリックにする（西岡・石井，2019）。

この方法で作成するルーブリックは，提出レポートに依存し，異次元の新レポートが出れば修正が必要となる。その意味で，教師にとっても未知の課題への挑戦を求めるパフォーマンス評価におけるルーブリックは，その集団内で相対的位置を定めた絶対評価基準である。他方，「変化の割合」などの既存教材であれば，教師は教材研究段階でルーブリックを用意できる。

パフォーマンス評価における生徒へのフィードバックでは，ルーブリックの共有も不可欠である。課題提示の際，教師が事前設定したルーブリックを提示したり，評定時に採点結果を総評することは，生徒には探究の仕方を学ぶ機会となる。生徒がルーブリック作成や評価に加われば，生徒の現状を知り，何を指導すべきかを考える機会，自身の評価基準を見直す機会となる。総合的な学習/探究の時間，理数探究などでの実施が期待される。

参考文献

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2018）「平成30年度全国学力・学習状況調査の結果を踏まえた授業アイディア例中学校」国立教育政策研究所.

西岡加名恵・石井英真（編著）.（2019）『教科の深い学びを実現するパフォーマンス評価』日本標準.

松下加代（2007）『パフォーマンス評価 ― 子どもの思考と表現を評価する』日本標準.

（高橋　等）